★
Exercice 1

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $A \Rightarrow B$ et $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ ont les même valeurs de vérité.

★
Exercice 2

À l'aide d'une table de vérité, démontrer que $\neg(A \vee B)$ et $(\neg A) \wedge (\neg B)$ ont les même valeurs de vérité.

★
Exercice 3

Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et leur négation :

1) f est croissante sur $[a, b]$.
2) f est majorée sur $[a, b]$.
3) La suite (u_n) est bornée.
4) La suite (u_n) tend vers $+\infty$.
5) p est un nombre premier (avec $p \in \mathbb{N}$).
6) m a la même parité que n.
7) Il existe un entier que l'on peut écrire comme somme de deux carrés.
8) 7 est le plus petit entier qu'on ne peut pas écrire comme la somme de trois carrés.

★
Exercice 4

Pour chacune des propositions suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, puis exprimer leur négation.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$
2) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq x$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq x$
4) $\exists x \in]0, +\infty[, x > 0, \forall y \in]0, +\infty[, x < y$
5) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x^2 = y) \wedge (y^2 = -x)$
6) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, 0 < x_0 < \varepsilon$
7) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, (2k = n) \vee (2k + 1 = n)$

★
Exercice 5

Pour chacune des implications suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, exprimer sa réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

1) Si ABC est un triangle rectangle, alors la somme de ses angles (en radians) est égale à π.
2) Si ABC est un triangle, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
3) Si $x > 0$, alors $-x + 1 < 0$
4) Si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.
5) Si f est une fonction croissante sur $[a, b]$, alors $f(a) < f(b)$
6) Si f est une fonction monotone sur $[a, b]$, alors

$$\forall c \in]a, b[, \quad (f(c) - f(a)) \times (f(b) - f(c)) \geq 0$$

★
Exercice 6

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \iff a = c$ et $b = d$.

★
Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $|4 - x| \leq 1$
2) $\sqrt{(x-2)^2} > 1$
3) $|x - 3| + |x + 4| \leq 1$

⋆

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

⋆

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n^2+5)$ est divisible par 3.

⋆

Exercice 10

Résoudre par analyse synthèse l'équation $\sqrt{4x+5} = x$

⋆

Exercice 11

Montrer par analyse-synthèse que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

⋆

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations d'inconnue x suivantes :

a) $|x^2 - 100| \geq 96$

b) $|x-1| \geq |x+2|$

c) $|x-5| + |6-2x| \geq 4$

⋆

Exercice 13

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon$, alors $x \leq y$.

⋆ ⋆

Exercice 14

Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n réels appartenant à $[0, \pi]$.
Montrer que si $\sin(x_1) + \sin(x_2) + \cdots + \sin(x_n) \geq \dfrac{n\sqrt{3}}{2}$, alors il existe $i \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$

⋆

Exercice 15

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses (démonstration requise), et écrire leurs négations :

a) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}],\ \dfrac{1}{x^2} \geq n$

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists q \in \mathbb{Q},\ q^2 = x$

c) $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, \exists k \in \{-2; 2\},\ y = \dfrac{kn}{2}$

d) $(\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = a^m) \iff (m = n)$ (où m et n sont deux entiers)

e) $(\forall x \in \mathbb{R}, (ax)^2 = (bx)^2) \iff (a = b)$ (où a et b sont deux réels)

⋆

Exercice 16

Si a et b sont deux réels, on note $\max(a,b)$ (respectivement $\min(a,b)$) le plus grand élément entre a et b (respectivement le plus petit), autrement dit $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } b \leqslant a \\ b & \text{si } a < b \end{cases}$ (respectivement $\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leqslant b \\ b & \text{si } b < a \end{cases}$

Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

⋆

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\sqrt{x^3+x^2-x} = \sqrt{2x-4x^2-x^3}$ et $\sqrt{x-2x^3} = \sqrt{5x^2-2x}$

⋆ ⋆

Exercice 18

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.